# Irregularidad fractal en hojas de especies vegetales

## Fractal irregularity in leaves of plant species

Cristian Camilo Valoyes Ayala[1]

**Resumen**

En este artículo se presenta un estudio del comportamiento de la dimensión fractal de veintisiete hojas de nueve especies vegetales mediante el método de *box-counting*. Para ello, se tomó, primero, el contorno de las hojas de estudio y, luego, toda la hoja, ya que solo con el contorno se obtenían dimensiones fractales erróneas. Al calcular la dimensión con toda la hoja, se obtuvieron dimensiones entre 1,3 y 1,8. En las medidas realizadas, se observó que la mayor irregularidad de las hojas de estudio se presenta cuando estas se encuentran en su etapa de desarrollo.

**Palabras clave:** dimensión fractal, *box-counting*, fractales.

**Abstract**

The behavior of the fractal dimension of 27 leaves of 9 plant species was studied using the box-counting method. First, the method was performed by taking the contour of the study sheets and then the entire sheet, due to the fact that with only the contour, erroneous fractal dimensions were obtained. When calculating the dimension with the whole sheet, dimensions between 1.3 and 1.8 were obtained. In the measurements made it was observed that the greatest irregularity of the study sheets occurs when they are in their development stage.

**Keywords:** Fractal Dimension, Box-Counting, Fractals.

## 1. Introducción

El concepto de geometría fractal fue introducido en las matemáticas en 1967 por el matemático Benoit Mandelbrot. La geometría fractal es una teoría matemática capaz de medir y describir la irregularidad de objetos autosimilares y naturales (Mandelbrot, 1972). Los fractales son objetos cuya principal característica es el ser autosimilares, es decir, que a cualquier escala se puede observar la misma estructura, la dimensión fractal de un objeto es mayor que su dimensión topológica. "La dimensión fractal se puede definir como el número que sirve para cuantificar el grado de irregularidad y fragmentación de un conjunto

[1] Estudiante de Matemáticas, Universidad Central. Correo: cvaloyesa@ucentral.edu.co.

geométrico o de un objeto natural" (Strecker, citado por Quintero y Ruiz, p.87).

En el presente trabajo se busca determinar con ayuda del método de *box-counting* la dimensión fractal para nueve distintas especies de hojas y poder hacer una comparación entre dichas dimensiones, de cada especie se tomaron tres hojas, una pequeña, una en estado de desarrollo y la otra en estado adulto.

## 2. Método de *box-counting*

Uno de los métodos para determinar la dimensión fractal de una imagen es el método del conteo de cajas o *box-counting*. Este método habla sobre la recolección de datos para el análisis de patrones complejos, dividiendo un conjunto de datos, objeto, imagen, etc. en trozos más pequeños, en forma de cajas. También se analizan las piezas en escalas menores. Una de las aplicaciones de este método se da en el campo de los sistemas naturales (Peitgen, Jurgens y Saupe, 1992).

El método de *box-counting* se usa para figuras en las que no hay autosimilitud, aunque hay algunas propiedades de escala. La dimensión de *box-counting* propone una medición sistemática, que se aplica a cualquier estructura en el plano y puede ser adaptada fácilmente para estructuras en el espacio.

El proceso se basa en poner la estructura sobre una rejilla con un tamaño *s*. Se cuentan el número de cuadros que contienen parte de la estructura. Esto da un número *N*. Por supuesto, este número dependerá del tamaño de la malla *r*. Por lo tanto, lo denotaremos notamos como *N(r)*. Ahora cambiamos *r* a tamaños cada vez más pequeños y se procede a contar los correspondientes números *N(r)* Después representaremos gráficamente los valores de $\log N(r)$ contra el $\log 1/r$ y obtendremos su pendiente (Peitgen, Jurgens y Saupe, 1992).

Para fines prácticos, es conveniente considerar una secuencia de rejillas donde el tamaño de la cuadrícula se reduzca en un factor de 1/2 de una rejilla a la siguiente; es decir que la malla se dividirá en cuatro cajas. La dimensión de *box-counting* se obtiene de la pendiente de la recta construida con los puntos, cuyas coordenadas cartesianas son los logaritmos del número de cuadrados que ocupa el objeto medido y del inverso multiplicativo del ancho del cuadrado. De esta forma, se deben tomar varias medidas de los cuadrados para que la dimensión sea más exacta.

Así, la dimensión fractal estará dada por:

*Ecuación (1a)*

$$D=\frac{log\left(N_2\right)-\log N_1}{log\left(\frac{1}{r_1}\right)-log\left(\frac{1}{r_2}\right)}$$

Otra forma de expresar esta ecuación es:

*Ecuación (1b)*

$$D=\frac{log\left(N_2\right)-\log N_1}{log\left(\frac{1}{r_2}\right)-log\left(\frac{1}{r_1}\right)}$$

Donde:

- $N_1$ es el número de cuadrados que contiene el contorno del objeto de la cuadrícula de partición $r_1$.
- $N_2$ es el número de cuadrados que contiene el contorno del objeto de la cuadrícula de partición $r_2$.
- $r_1$ es el grado de particiones de la cuadrícula 1.
- $r_2$ es el grado de particiones de la cuadrícula 2.
- *D* es la dimensión fractal.

## 3. Metodología

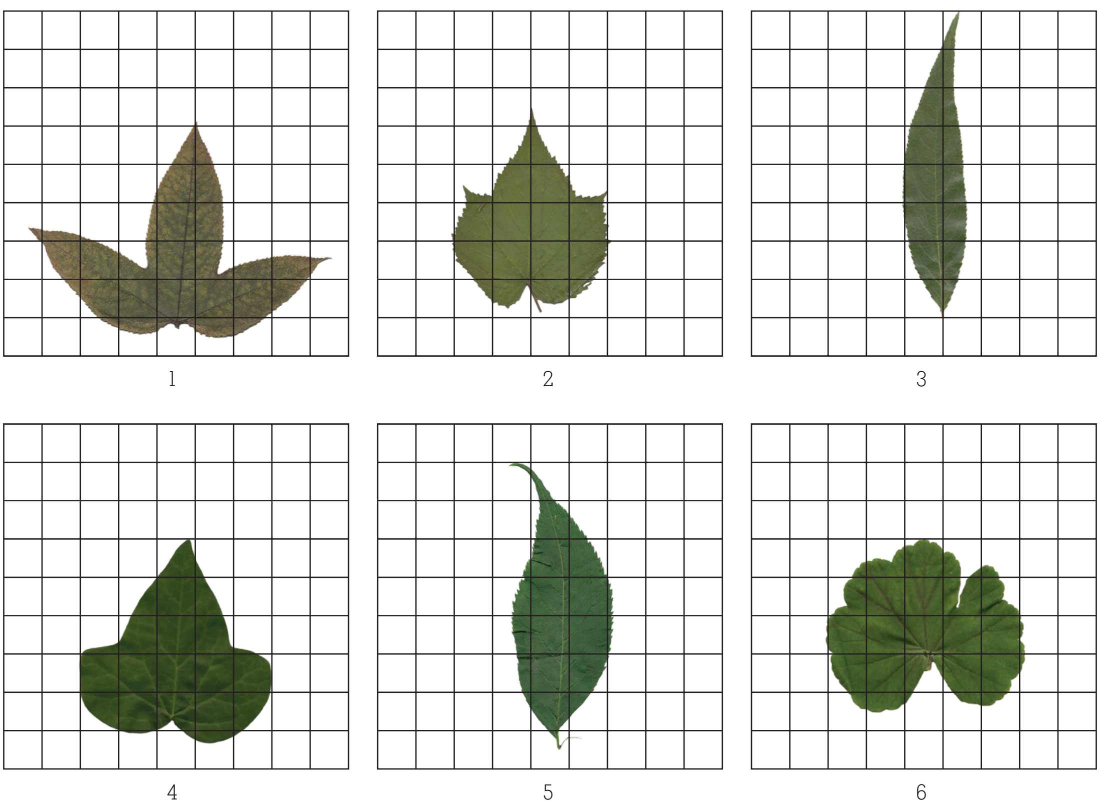
Para la primera parte del trabajo se calculó la dimensión fractal con la frontera de las hojas y luego se determinó la dimensión fractal con toda la hoja. Con este análisis se pudo concluir que la mejor forma para calcular dichas dimensiones es tomar toda la hoja.

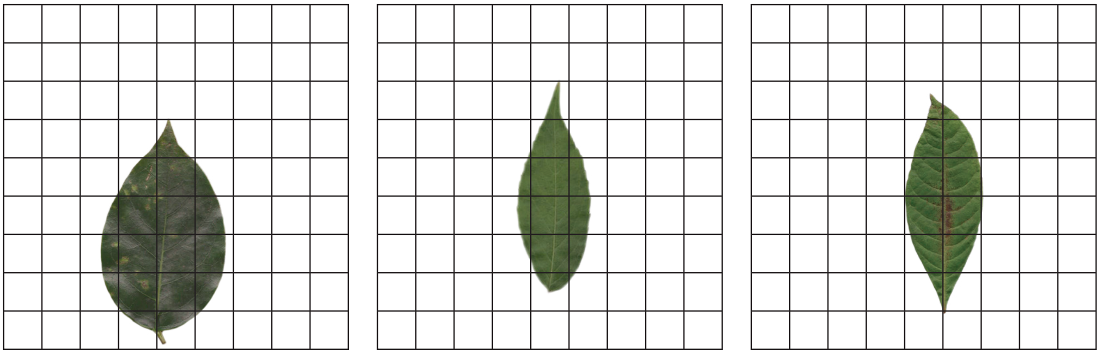
Inicialmente, se construyeron las cuadrículas para cada una de las hojas. Cada una de ellas se dividió en una cuadrícula de $9 \times 9$ cm; luego se dividió cada cuadrado en cuatro partes para obtener una de $18 \times 18$ y se repitió dicho procedimiento. Al final, se obtuvo una partición de $36 \times 36$. Luego, se procedió a contar los cuadros que contenían alguna parte de toda la hoja. Teniendo estos datos, se calculó la dimensión fractal usando la fórmula de *box-counting*.

La reducción de la cuadrícula se debe a que la hoja no es en sí un fractal. Por lo tanto, con esto se busca que cada uno de los cuadros que contienen una parte de la frontera, y después de toda la hoja, sean lo más similares. Además, con esta reducción se garantiza una mejor aproximación de la dimensión fractal del objeto de estudio.

Para este estudio se tomó un número de veintisiete hojas, repartidas en nueve especies. De cada especie se tomaron tres hojas, cada una de tamaño diferente. La selección de estas se hizo pensando en poder contestar las hipótesis planteadas al comienzo.

En la figura 1 se observan las especies de la uno a la nueve, respectivamente, con las cuales se realizó el estudio.

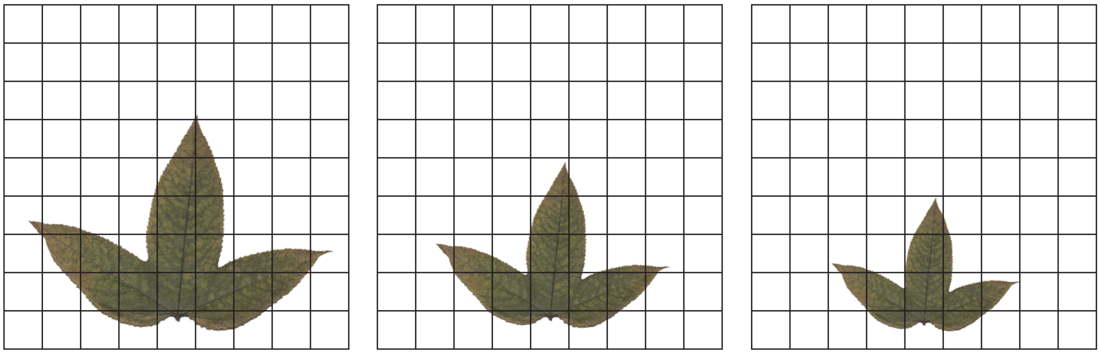




7 8 9

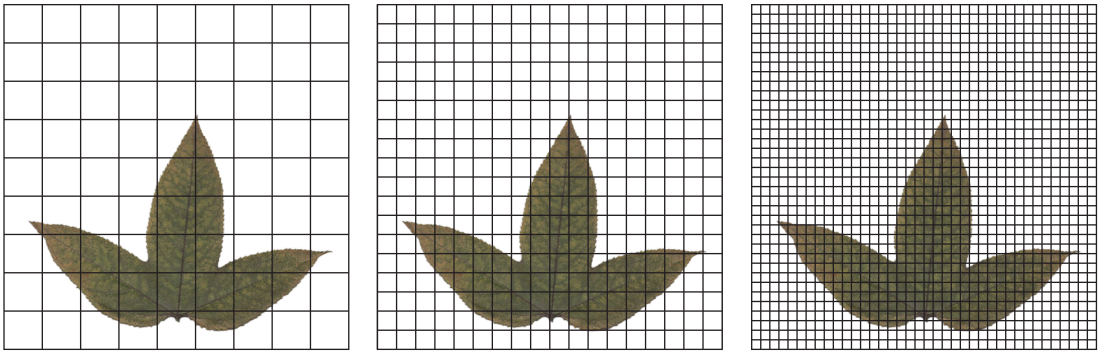
**Figura 1.** Hojas de estudio.
Fuente: elaboración propia.

En la figura 2 se presentan las tres hojas que fueron seleccionadas a partir de las primeras nueve. En la figura 3 se muestran las tres cuadrículas que se realizaron en la hoja 1 de la especie 1. El proceso de las cuadrículas se realizó para cada una de las veintisiete hojas de las nueve especies diferentes.



a b c

**Figura 2.** Hoja de la especie 1, diferente tamaño con la misma cuadrícula (grande).
Fuente: elaboración propia.



a b c

**Figura 3.** Las tres cuadrículas de la hoja 1, especie 1.
Fuente: elaboración propia.

## 4. Resultados

Como se había mencionado anteriormente, la dimensión fractal es la pendiente de los logaritmos de la longitud de la cuadrícula contra el número de cuadros que contienen parte de las hojas. A continuación, se muestra cómo calcular la dimensión fractal para la hoja 1 de la especie 1 (figura 4). Posteriormente, en las tablas 1 y 2 se muestran las dimensiones de cada una de las hojas.

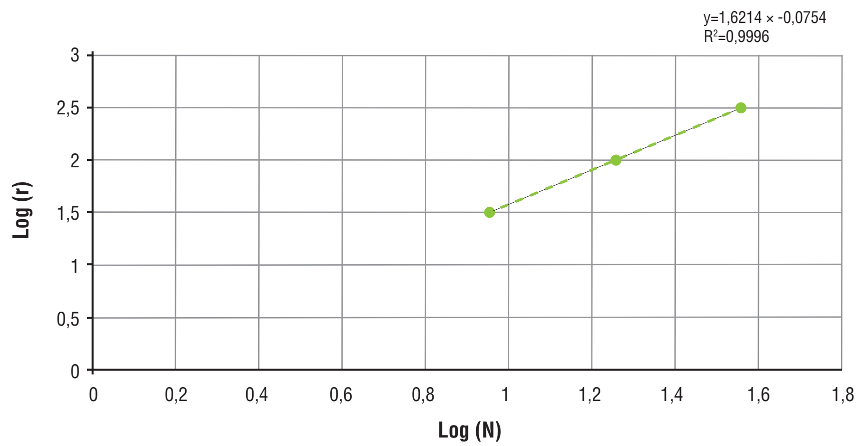



**Figura 4.** Gráfica de los log(r) contra log(N) (hoja 1, especie 1).
Fuente: elaboración propia.

**Tabla 1.** Dimensiones fractales de las hojas

| Especie | Hoja 1 | Hoja 2 | Hoja 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1,6214 | 1,661 | 1,5149 |
| 2 | 1,7177 | 1,7673 | 1,6846 |
| 3 | 1,6179 | 1,641 | 1,411 |
| 4 | 1,5522 | 1,6993 | 1,5688 |
| 5 | 1,5681 | 1,635 | 1,639 |
| 6 | 1,6062 | 1,7755 | 1,5963 |
| 7 | 1,7177 | 1,7196 | 1,5959 |
| 8 | 1,621 | 1,6303 | 1,3187 |
| 9 | 1,613 | 1,639 | 1,4325 |

Fuente: elaboración propia.

**Tabla 2.** Diferencia entre la dimensión mayor y la menor de las hojas

| Especie | Hoja | Especie | Hoja | Especie | Hoja |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,15 | 4 | 0,15 | 7 | 0,13 |
| 2 | 0,08 | 5 | 0,07 | 8 | 0,31 |
| 3 | 0,23 | 6 | 0,18 | 9 | 0,21 |

Fuente: elaboración propia.

La tabla 3 asocia las dimensiones cuando solo se contaron los cuadros que contenían una parte de la frontera de las hojas. Cabe aclarar que estas dimensiones están mal, debido a que algunas son menores que 1, cifra errónea si se tiene en cuenta que la dimensión topológica de las hojas es siempre mayor a 1.

**Tabla 3.** Dimensiones fractales de la frontera de las hojas

| Especie | Hoja 1 | Hoja 2 | Hoja 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,9423 | 1,1374 | 1,1384 |
| 2 | 1,1047 | 1,1813 | 1,1788 |
| 3 | 1 | 1 | 0,9271 |
| 4 | 0,9402 | 1,0162 | 0,039 |
| 5 | 1,0198 | 1,0535 | 1,1448 |
| 6 | 0,8787 | 1,0715 | 0,9465 |
| 7 | 0,9097 | 1 | 1,0198 |
| 8 | 1,1993 | 0,9834 | 1,161 |
| 9 | 0,8968 | 1,0352 | 1,365 |

Fuente: elaboración propia.

**Tabla 4.** Conteo de cuadros (hoja 1, especie 1

| $r_i$ | $N_{ri}$ |
|---|---|
| 9 | 30 |
| 18 | 89 |
| 36 | 284 |

$r_i$: número de cuadros que contienen alguna parte de la hoja. $N_{ri}$: longitud de la cuadrícula.
Fuente: elaboración propia.

**Tabla 5.** Logaritmos (hoja 1, especie 1)

| $Log(r_i)$ | $Log(N_{ri})$ |
|---|---|
| 0,9542 | 1,4771 |
| 1,2552 | 1,9493 |
| 1,5563 | 2,4533 |

$Log(r_i)$: logaritmo del número de cuadros que contienen alguna parte de la hoja; $Log(N_{ri})$: logaritmo de la longitud de la cuadrícula.

Fuente: elaboración propia.

- Las dimensiones fractales de las hojas no son las mismas para tres hojas de una misma especie. Sin embargo, la diferencia entre las dimensiones es pequeña (en sus cifras decimales) con se puede observar en la tabla 4.
- Recíprocamente dos hojas pueden tener la misma dimensión fractal y pertenecer a especies diferentes. Sin embargo, se pudo determinar que la mayor irregularidad de las hojas de estudio se presenta cuando estas están en su etapa de desarrollo (hoja 2 en la figura 2), con excepción de la especie 5 (figura 1), la cual presenta su mayor irregularidad en su última etapa; pero la diferencia entre la etapa de desarrollo y la etapa final es mínima (0,004).

## 5. Conclusiones

La caracterización de objetos naturales mediante el uso de dimensiones fractales no es viable sin tener en cuenta las particularidades del sistema. En este estudio, así como en algunos previos (Como el de Rodríguez, Mariño, Avilan y Echeverri, 2002), fue necesario crear una metodología de observación capaz de evidenciar las características de los objetos.

Con los resultados se pudo concluir lo siguiente:

- La mejor forma de calcular la dimensión fractal para las hojas es tomar toda la hoja y no solo el borde —como se hizo inicialmente— debido a que la dimensión topológica es 1. Su dimensión fractal debe ser mayor a esta cifra. Por ende, no se pueden usar solo las fronteras, ya que presentan dimensiones menores o iguales (tabla 3).

## Referencias


Mandelbrot, B. (1972). *The Fractal Geometry of Nature*. San Francisco: Freeman.

Peitgen, H., Jurgens, H. y Saupe, D. Limits and self similarity. En *Chaos and Fractals: New frontiers of science* (pp. 135-182). Nueva York: Springer-Verlag.

Quintero, O. y Ruiz, J. (2011). Estimación del exponente de Hurst y la dimensión fractal de una superficie topográfica a través de la extracción de perfiles. *La UD y la Geomática*, 5, 84-91.

Rodríguez, J., Mariño, M. Avilan, N. y Echeverri, D. (2002). Medidas fractales de arterias coronarias en un modelo experimental de reestenosis. *RCC, 10*(2).