

# Estimación del exponente de Hurst y la dimensión fractal del petróleo: caso WTI

## Hurst exponent estimation and fractal dimension of oil: The WTI case

Néstor José Hernández Gómez<sup>1</sup>  
Asesor: Nicolás Guillermo Avilán Vargas<sup>2</sup>

### Resumen

Para estudiar la variedad de sistemas y con el propósito de lograr la comprensión de un fenómeno a través de un método matemático se determinó el exponente de Hurst en la serie de tiempo de los precios del barril de petróleo WTI durante el período enero 2006 y abril 2016, con el fin de cuantificar su tendencia relativa, hallar la dimensión fractal y lograr una interpretación propia de lo observado. Se aplicó el método de análisis de rango reescalado hasta un máximo de ocho particiones de la serie. Se obtuvo un valor representativo de 0,5587 en el exponente de Hurst y una dimensión fractal de 1,4413, cuyos coeficientes indican que la serie es persistente, de ruido negro y no se ajusta a un movimiento browniano aleatorio.

**Palabras clave:** Análisis de Rango Reescalado, Análisis de Persistencia, Dimensión Fractal, Exponente de Hurst, Precios del Petróleo.

### Abstract

To study the variety of systems and in order to achieve the understanding of a

phenomenon through a mathematical method, the Hurst Exponent was determined in time series of a barrel prices of WTI petroleum during the period of January 2006-April 2016, in order to quantify their relative tendency, find the fractal dimension and make its own interpretation of the observed. The Rescaled Range Analysis method was applied up to 8 partitions of the series, obtaining a representative value of 0.5587 in the Hurst exponent and a fractal dimension of 1.4413, whose coefficients indicate that the series is persistent, of a black noise and does not adjust to a random Brownian motion.

**Keywords:** Rescaled Range Analysis, Analysis of Persistence, Fractal Dimension, Hurst Exponent, Oil Prices.

<sup>1</sup> Estudiante de Matemáticas, Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas, Universidad Central.  
Correo: nhernandezg3@ucentral.edu.co.

<sup>2</sup> Asesor: Nicolás Guillermo Avilán Vargas. PhD. en Física. Profesor asociado del Departamento de Ingeniería Electrónica de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Básicas, Universidad Central.  
Correo: navilanv@ucentral.edu.co.

## 1. Introducción

El petróleo es una de las materias primas más importantes a nivel mundial. Con el pasar del tiempo, su precio se convirtió en objeto de estudio, no solo por su impacto en la economía de cada país, sino porque a través de un acertado pronóstico se pueden tomar decisiones. Por ello, sin obviar variables que influyen en su costo, cuantificables o no, se reconoce la existencia de estas como factores que determinan inestabilidad en su valor. Al respecto, Mandelbrot afirma lo siguiente:

El mecanismo típico de la formación de los precios implica tanto un conocimiento del presente como una previsión del futuro. Y aunque los determinantes físicos exógenos de un precio varíen de modo continuo, las previsiones cambian drásticamente en un abrir y cerrar de ojos. Cuando una señal física de energía y duración despreciables, “un plumazo”, provoca un cambio brutal en las previsiones (y si ninguna institución inyecta inercia para complicar las cosas) un precio determinado de acuerdo con las previsiones puede dispararse, caer a cero o hacer cualquier cosa. (1982/1997, p.468)

Por tal motivo, basados en el carácter irregular e impredecible del valor del crudo, donde existe una dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, cuya perturbación genera consecuencias inmediatas, surge la necesidad de considerar el histórico de precios del petróleo, con el objetivo de identificar y comprobar la relación temporal entre las variables intervinientes. En este contexto, existen investigaciones que utilizan técnicas para observar el comportamiento de las series. Quintero y Ruiz (2011) hallan el exponente de Hurst ( $H$ ) y la dimensión fractal ( $D_f$ ) al aplicar el método del Rango Reescalado ( $R/S$ ) sobre algunos perfiles topográficos. Obtienen valores asocia-

dos con un comportamiento de persistencia y se valida que la superficie real posee cambios significativos en sus alturas, relacionando  $H$  y  $D_f$  con el nivel de rugosidad que pueden alcanzar las superficies topográficas.

Por su parte, García (2016) utiliza la teoría de la rugosidad cinética para analizar las fluctuaciones diarias del crudo. Él estima el exponente de Hurst a través del análisis  $R/S$ , estableciendo que los eventos extremos condicionan el exponente  $H$  a niveles cercanos a 0,5, lo que, a manera de discusión y basado en sus resultados, interpreta como una transición de un comportamiento antipersistente a uno persistente, concluyendo que  $H$  aumenta frente a los efectos inducidos por dichos eventos.

A partir de la revisión de antecedentes, se observa que los autores realizan el estudio de diversas series de tiempo, para lo cual emplean el método  $R/S$ . Al aplicarlo, logran describir el comportamiento de la serie, en el cual, además de conocer la persistencia, se determina el grado de rugosidad y se explican características particulares de las mismas.

Los modelos revisados constituyen una herramienta de aprendizaje y de construcción de conocimiento en donde es posible observar la generación de precios del barril y su incidencia en el día a día. Este proyecto toma en cuenta el valor diario en dólares americanos del crudo West Texas Intermediate (WTI) durante el período entre enero del 2006 y abril del 2016, para estimar los coeficientes  $H$  y  $D_f$  de la serie haciendo uso del método de  $R/S$  y, tiene como objetivo determinar la persistencia de la serie de valores a partir de los datos consultados; si bien no se elabora un modelo matemático, la aplicación de las metodologías revisadas lleva a una validación y comprensión del entorno, corrobora el método de trabajo y facilita la interpretación de la serie, aspectos relevantes en el proceso de modelación.

Este artículo se estructura en cuatro secciones. En la segunda sección se describen los materiales y métodos. En la tercera parte se plantean los resultados. En el cuarto segmento se realiza una discusión de los resultados. Finalmente, se presentan las principales conclusiones.

## 2. Materiales y métodos

Se obtuvo un conjunto de 3776 valores correspondientes al precio diario del barril de petróleo en el período enero 2006 y abril 2016. Las cotizaciones se tomaron de los portales web del Departamento de Energía de los Estados Unidos de América y de S&P Global Platts. El estudio se centró en el análisis del WTI como índice del mercado petrolero, cuya justificación es que, ante un aumento en la magnitud de las fluctuaciones, otros indicadores se comportan de manera similar. Así se procedió a realizar la tabulación de los datos cuyo histórico se ve representado en la figura 1, observándose un comportamiento desconocido e irregular.

Se consideró el total de datos y se eligió un máximo de ocho subperíodos, procediendo a aplicar sobre cada partición el método de rango reescalado a fin de encontrar el valor del exponente de Hurst.

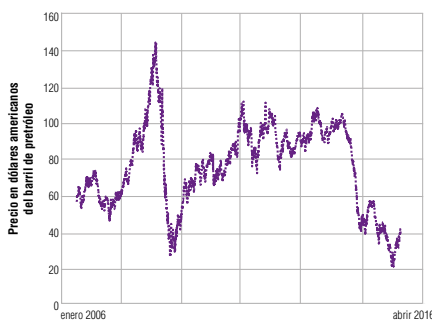


Figura 1. Precios del barril de petróleo WTI entre enero y abril del 2006.

Fuente: Elaboración propia.

### 2.1 Exponente de Hurst

El coeficiente de Hurst es una medida considerada por el hidrólogo Harold Edwin Hurst, cuyo parámetro indica la persistencia de una serie de datos en el tiempo. De hallarse persistencia, existiría una dependencia entre los datos de la serie. Su estimación permite determinar la correlación, es decir, la relación entre los valores de una serie en el tiempo  $t$  y su valor en el tiempo  $t+1$ .

Mandelbrot (1982) indica que  $H$  toma valores entre 0 y 1. Asimismo, señala que puede olvidarse la distribución de los datos y abordar la dependencia a largo plazo por medio del análisis  $R/S$ , el cual se refiere a la distinción entre los plazos cortos y muy largos.

Si  $H = \frac{1}{2}$  implica un proceso independiente, no hay correlación entre sus variables. Posee ruido blanco, cuyos valores de señal en dos tiempos diferentes no guardan relación. Determina un proceso aleatorio. Estos se conocen como movimientos brownianos, cuyos incrementos en una serie de tiempo son independientes del comportamiento pasado.

Si  $0,5 < H \leq 1$  indica una serie de tipo persistente, con efecto de memoria a largo plazo, existe una correlación entre sus variables. Se tiene un ruido negro que aparece en procesos cíclicos. Si hay un aumento desde el tiempo  $t_{i-1}$  al  $t_i$  probablemente habrá un aumento del  $t_i$  al  $t_{i+1}$  igual para las disminuciones.

Si  $0 < H \leq 0,5$  caracteriza la serie de tiempo como un proceso de antipersistencia, un sistema que cubre menos distancia que uno aleatorio, se considera que tiene ruido rosa y está relacionado con procesos de relajación. Acá un aumento tiende a ser seguido por una disminución o viceversa.

## 2.2 Método de Análisis de Rango Reescalado (R/S)

Para Batlle y Grèbol (2008), el análisis R/S consiste en hallar el rango ajustado  $R_{(n)}$ , el cual equivale a la distancia que el sistema recorre en una unidad de tiempo. Este rango es reescalado, es decir, normalizado.

El método de R/S puede ser descrito como sigue:

1. Se considera una serie cuyos datos son registrados mediante un período de tiempo  $t$ :

$$x_t = 1, \dots, T$$

2. La serie se divide en submuestras de similar tamaño:

$$\text{Ecuación (1)}$$

$$n = \frac{X}{i}$$

3. Se calcula la media de la serie temporal para cada submuestra:

$$\text{Ecuación (2)}$$

$$\langle x \rangle_T = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T X_i$$

4. Se halla la diferencia acumulada respecto a la media del índice:

$$\text{Ecuación (3)}$$

$$X = (t, T) = \sum_{u=1}^t [x(u) - \langle x \rangle_T]$$

5. Se determina el máximo y mínimo de cada partición. La diferencia de estos valores es el rango de cada submuestra:

$$\text{Ecuación (4)}$$

$$R(T) = \max X(t, T) - \min X(t, T) \quad 1 \leq t \leq T$$

6. Se calcula la desviación estándar que se define como sigue:

$$\text{Ecuación (5)}$$

$$Sd = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{i=1}^T [x(t) - \langle x \rangle_T]^2}$$

7. Se obtiene el estadístico dividiendo el rango por la desviación estándar encontrada en (f):

$$\text{Ecuación (6)}$$

$$\frac{R}{Sd} = (cT)^H$$

8. Para cada partición se calcula el promedio del rango reescalado. Dado que el crecimiento de R/S sigue la ley de potencia descrita en (6), la potencia de dicha ecuación es el coeficiente de Hurst, el cual se obtiene aplicando una regresión lineal:

$$\text{Ecuación (7)}$$

$$\log\left(\frac{R}{Sd}\right) = H \log(T) + \log(c)$$

De manera general, el exponente de Hurst puede estimarse a través de la pendiente de la

recta  $\log\left(\frac{R}{Sd}\right) = H \log(T) + \log(c)$

## 2.3 Dimensión Fractal ( $D_f$ )

Para Vindel (2013) la dimensión fractal describe las características de ocupación del espacio. A través de este índice, se cuantifica la geometría de los objetos y se relaciona con la capacidad de estos para ocupar el espacio euclidiano en el que se encuentran, considerando que, al magnificarlos, se observan niveles de complicación idénticos al conjunto de partida.

La dimensión fractal estará definida por la diferencia entre la dimensión euclídea y el valor de  $H$ . Por lo cual, si la dimensión fractal toma valores  $1 < D_f < 1,5$ , para  $H > 0,5$  la  $D_f$  disminuirá y tenderá a acercarse a una recta y para  $H < 0,5$  la  $D_f$  aumentará y tenderá a ocupar una mayor superficie.

## 2.4 Descripción general y aplicación del método $R/S$

Se inició con una serie de tiempo de tamaño  $N=3776$  datos, para obtener el rendimiento logarítmico (figura 2). La serie inicial se reduce a una nueva serie de longitud  $M=N$ , donde cada rendimiento se definió de la siguiente manera:

Ecuación (8)

$$M_{i=} \log \left( \frac{N_{i+1}}{N_i} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, M$$

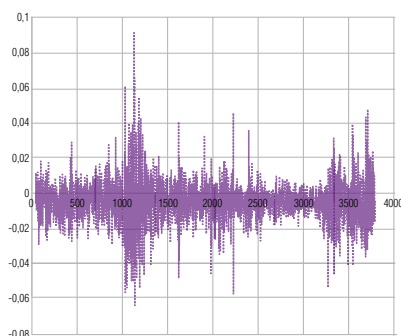


Figura 2. Rendimiento logarítmico de la serie  $M$ , precios diarios del petróleo WTI enero 2006 abril 2016. Fuente: elaboración propia.

Aplicando el mismo paso, se efectuaron pruebas para evidenciar la dependencia del valor  $H$  respecto al orden temporal de los datos. Las figuras 3 y 4 muestran el rendimiento de la serie  $M$  al establecer un orden en los precios.

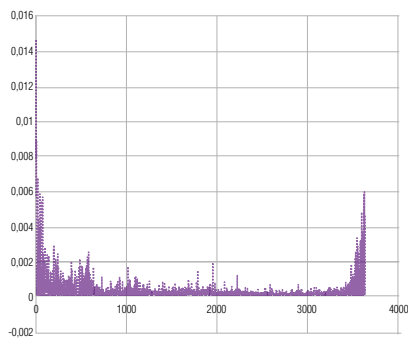


Figura 3. Rendimiento logarítmico de la serie  $M$ , precios diarios del petróleo ordenados de menor a mayor. Fuente: elaboración propia.

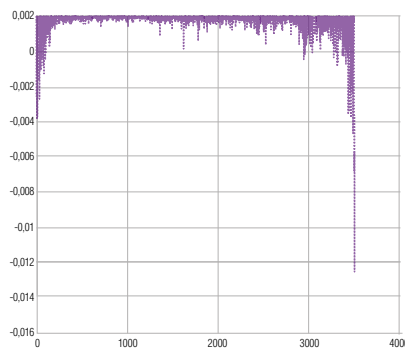


Figura 4. Rendimiento logarítmico de la serie  $M$ , precios diarios del petróleo ordenados de mayor a menor. Fuente: elaboración propia.

Asimismo, a partir de un conjunto de números aleatorios, para un rango entre 20 y 150, se crea una serie  $P$  de igual longitud a la trabajada. Se asumen estos como precios diarios del crudo, a fin de ensayar y mostrar un comportamiento altamente errático. La figura 5 representa el rendimiento logarítmico de  $P$ .

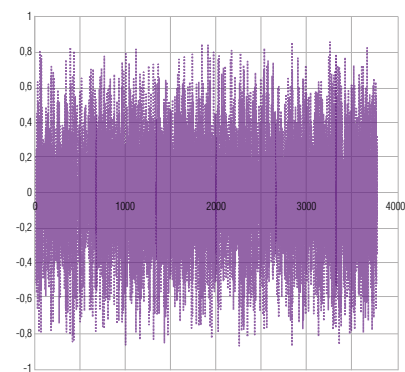


Figura 5. Rendimiento logarítmico de la serie  $P$ . Fuente: elaboración propia.

Seguidamente se ejecuta el paso (b) del método, realizando hasta un máximo de 8 particiones de la serie. El tamaño de cada una de estas se hacía muy pequeño, en la medida que se realizaban las subdivisiones. Así, sucesivamente se siguen cada uno de los pasos para obtener el  $R/S_n$  para diferentes tamaños de  $n$ .

### 3. Resultados

En la tabla 1 se presenta la construcción de grupos en la metodología del análisis de rango reescalado, después de aplicar la regresión lineal. El valor de  $H$  en la serie de los precios del petróleo está dado por la pendiente de la recta, representada en la figura 6 y su  $D_f \approx 1,4413$ .

Tabla 1.  $\text{Log}(R/S_n)$  vs.  $\text{log}(n)$  de la serie de los precios del petróleo WTI enero 2006 y abril 2016

$n$	$\text{Log}(R/S_n)$	$\text{log}(n)$
3776	6,28115785	8,23642053
1888	5,54707916	7,54327335
944	4,73020646	6,85012617
472	3,92535419	6,15697899
236	3,4337699	5,46383181
118	2,6195487	4,77068462
64	2,24971042	4,15888308
59	2,18889688	4,07753744

Fuente: elaboración propia.

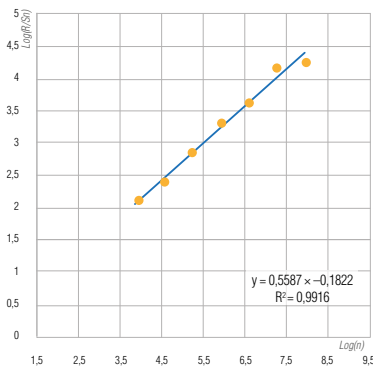


Figura 6.  $\text{Log}(R/S_n)$  vs.  $\text{log}(n)$  de la serie de los precios del petróleo WTI enero 2006 – abril 2016. Fuente: elaboración propia.

Las figuras 7 y 8 representan el  $\text{Log}(R/S_n)$  vs.  $\text{Log}(n)$  de la serie  $M$ , luego de considerar un orden arbitrario en los precios diarios del barril de petróleo. Las dimensiones fractales pueden deducirse a partir del valor  $H$ .

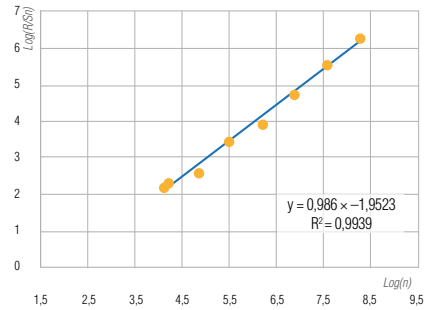


Figura 7.  $\text{Log}(R/S_n)$  vs.  $\text{log}(n)$  de los precios de la serie  $M$ , ordenados de menor a mayor. Fuente: elaboración propia.

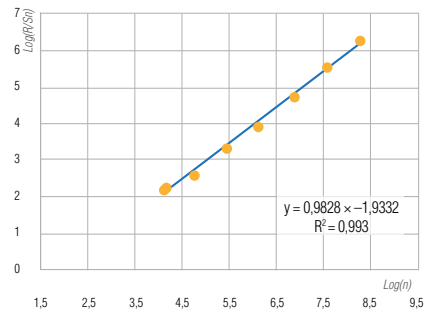


Figura 8.  $\text{Log}(R/S_n)$  vs.  $\text{log}(n)$  de los precios de la serie  $M$ , ordenados de mayor a menor. Fuente: elaboración propia.

Por último, se muestra el  $\text{Log}(R/S_n)$  vs.  $\text{Log}(n)$  para el conjunto de números aleatorios - Serie  $P$  (Figura 9).

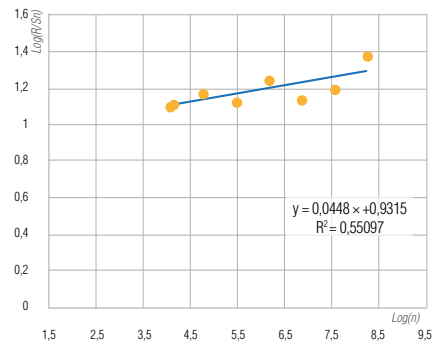


Figura 9. Representación gráfica del  $\text{Log}(R/S_n)$  vs.  $\text{log}(n)$  con datos aleatorios. Fuente: elaboración propia.

## 4. Discusión

Para  $0,5 < H \approx 0,5587 \leq 1$  se asocia un comportamiento de persistencia. García (2016) concluye que el valor de  $H$  bajo los efectos de factores extremos tiende a aumentar, lo que en nuestro resultado permite interpretar que, ante nuevos eventos, los precios del petróleo mantendrán el mismo comportamiento de persistencia, hasta que el mercado se estabilice y pierda la tendencia, sin obviar el efecto de memoria a largo plazo. En cuanto al método utilizado, se logra validar el proceso y se calcula la dimensión fractal a partir de la estimación del exponente de Hurst. Las pruebas realizadas permiten comparar la teoría con cada valor experimental, donde la serie  $M$  de los precios del petróleo presenta una  $D_f \approx 1,4413$ .

Asimismo, al considerar el orden creciente de los datos de la serie  $M$  se obtiene una  $D_f \approx 1,014$ ; en su orden decreciente, una  $D_f \approx 1,0172$ , y para la serie  $P$ , creada a partir de valores aleatorios, una  $D_f \approx 1,9552$ . Lo obtenido se visualiza en los gráficos de retornos, cuya interpretación es posible luego de realizar su comprobación. Finalmente, a través del orden establecido, se obtienen valores cercanos del exponente de Hurst. Sin embargo, surge la necesidad de hallar el valor de  $H$  en períodos específicos de tiempo y con presencia de fluctuaciones.

## 5. Conclusiones

La serie de tiempo de los precios del barril de petróleo WTI, en el período enero 2006 a abril 2016 presenta un comportamiento persistente, fractal y de ruido negro, ya que se obtuvo un exponente de Hurst aproximado de 0,5587 y una dimensión fractal de 1,4413, lo que implica que un evento pasado tiene un

efecto de decaimiento sobre el futuro, es decir, existe dependencia a largo plazo.

A través de la representación y aplicación del procedimiento, se corrobora que un pequeño exponente de Hurst está relacionado con una dimensión fractal alta y una superficie más rugosa, mientras que un mayor valor de  $H$  tiene una  $D_f$  más baja y una superficie más lisa. De la variación entre puntos cercanos de la serie depende el valor de la dimensión fractal, por lo que esto determinará el comportamiento errático o no de la función.

## Referencias

- Batlle, A. y Grèbol, S. (2009). *Fractales en los mercados financieros* (tesis de maestría). Barcelona: Barcelona School of Management de la Universidad Pompeu Fabra.
- Departamento de Energía de los Estados Unidos de América (s.f.). Consultado en <http://energy.gov/>.
- García, S. (2016). *Análisis sistémico del escalamiento dinámico de las fluctuaciones del petróleo: caso WTI* (tesis doctoral). Instituto Politécnico Nacional, México.
- Mandelbrot, B. (1982/1997). *La geometría fractal de la naturaleza*. España: Tusquets Editores, S.A.
- Quintero, O. y Ruiz, J. (2011). Estimación del exponente de Hurst y la Dimensión Fractal de una superficie topográfica a través de la extracción de perfiles. *UD y la Geomática*, 5 (2), 84-91.
- S&P Global Platts (s.f.). Consultada en marzo, 2016, de <http://www.platts.com.es/>
- Vindel, J. (2012). *Estudio de la intermitencia de la turbulencia en la capa límite atmosférica y aplicación a los mercados financieros* (tesis doctoral). Madrid: Universidad Complutense de Madrid.