Teoría del control óptimo y los aportes a la gestión de inventarios: una revisión de literatura

Optimal Control Theory and its Contribution to Inventory Management: a bibliographical revision

Luis Felipe Jiménez Sánchez[1] y Óscar Mauricio Cepeda Valero[2]

Resumen

El objetivo de este artículo es presentar una revisión de la literatura sobre la teoría de control óptimo (TCO) en el campo de la gestión de inventarios. Lo que se busca es reconocer los diferentes aportes desde las diferentes metodologías implementadas y sus aplicaciones. Para eso, se revisaron bases de datos especializadas en materia de inventarios y optimización avanzada. Los temas clave de búsqueda fueron *optimal control theory* e *inventory models*. En la introducción, se muestra la importancia de los inventarios en la industria, así como algunas definiciones generales de los inventarios. Luego se presentan los aportes de la TCO a la gestión de inventarios y, finalmente, algunas conclusiones. Se encontró que los modelos TCO de inventarios tienen alrededor de cuatro aplicaciones. Son apropiados para problemas de tipo determinístico y estocástico, así como para diferentes condiciones iniciales.

Palabras clave: Teoría de Control Óptimo, Problema de Inventarios y Producción

Abstract

The aim of this article is to show the literature review on the topic of optimal control theory in the field of inventory management. What is sought is to recognize the different contributions from different implemented methodologies and applications. For this specialized databases were reviewed on inventories and advanced optimization, provided by the library of the University Central, mostly

1 Estudiante de Ingeniería Industrial, Universidad Central. Miembro del semillero de investigación SIPO y del Institute of Industrial and Systems Engineers (IISE). Correo: ljimenezs2@ucentral.edu.co

2 Ingeniero industrial, químico y magíster en ingeniería industrial. Miembro del semillero de investigación SIPO y del Institute of Industrial and Systems Engineers (IISE). Correo: ocepedav@ucentral.edu.co

in English language. Key topics were "optimal control theory" "Optimal Control Theory" among others. The importance of inventories in the industry, some general definitions of inventories, then the contributions of the TCO be shown to inventory management and finally some conclusions are shown in the introduction. It was found that the TCO models in applying inventories are few, but they are conducive to deterministic and stochastic problems of type; as well as different initial conditions.

Keywords: Optimal Control Theory, Problem Inventory and Production.

1. Introducción

El campo de la investigación de operaciones ha hecho aportes a la ingeniería industrial. Estos se ven reflejados en los métodos utilizados en la industria para optimizar sus recursos, ser más competitivos y obtener mayores utilidades. Países como Colombia, que empiezan a interesarse en el desarrollo de su industria, reconocen que esta es clave para el desarrollo y mejoramiento de la calidad de vida de sus habitantes (Groover, 2007).

La investigación de operaciones ofrece métodos tradicionales que permiten el control de procesos, la mejora continua y la gestión de la calidad, tales como la programación lineal y dinámica y la teoría de decisiones. No obstante, el desarrollo desde estas áreas ha permitido desarrollar métodos de mayor complejidad y mejores resultados, sobre todo, por la exactitud que ofrecen. Es el caso de la *teoría del control óptimo* (TCO), una rama de las matemáticas y la optimización. Esta permite llevar un sistema dinámico con problemas de espacios multidimensionales al mejor estado posible (Chinchuluun et ál., 2010).

Sin embargo, la TCO aún es muy incipiente en la academia, dada la complejidad de su aplicación. Esto ha hecho que sean pocos los avances logrados en este campo. Por eso, surge la siguiente pregunta: *¿cuáles son los principales aportes de la TCO en la gestión de inventarios?*

Para resolverla, se desarrolló la presente investigación, basada en artículos que desarrollan modelos TCO en inventarios. Se excluyeron aplicaciones de TCO en el área económica. Los datos se presentan según los modelos desarrollados por los autores, junto con sus principales hallazgos, recomendaciones y metodologías usadas, entre otros.

2. La teoría del control óptimo en la ingeniería

Diferentes teorías matemáticas usan modelos formales y abstractos que permiten identificar el estado de las variables y medir la eficiencia de los sistemas. El primer caso de estudio correspondía al comportamiento del sistema solar (Burlisch et ál., 1993). Posteriormente, Lev Semenovich Pontrygain fue el primero en reconocer que la TCO podría revolucionar la teoría moderna de la optimización y le dio explicación y solución a través del cálculo de variaciones, con el cual desarrolló el método más utilizado de solución, que lleva su nombre: el principio del máximo de Pontrygain. Este, básicamente, se encarga de mostrar todos los métodos de solución para la optimización en el tiempo, tomando como referencia los estudios de programación dinámica hechos por Richard Bellman (Cara, An y Zuazua, 2005).

La ecuación diferencial de Hamilton-Jacobi-Bellman es usada en el cálculo de variaciones para dar solución a problemas como el de la *braquistrocona*[3] y el *isoperimétrico*[4] (Ferreyra y Pascal, 1999). Se trata, por ejemplo, de maximizar recorridos o áreas que tienen que ver con factores externos, como la velocidad, la posición, la energía del sistema y la incidencia del ambiente, involucrando herramientas como las condiciones de Karush Kunh Tucker, los métodos optimizadores de Euler, la aplicación de la función lagrangiana, entre otros (Parra, 1992).

En la industria, las primeras aplicaciones de la TCO se dieron en cuestiones relacionadas con la evaluación de los efectos de las teorías económicas sobre la producción y el comportamiento del mercado, planeación de la demanda y la oferta, el control sobre las inversiones en el tiempo, maximización de utilidades y la minimización de costos. En estos últimos se incluye la TCO para la gestión de inventarios (GI) (Clason, 2015), siendo el GI un tema polémico para los empresarios, dirigentes y especialistas en el tema, dada la variedad de teorías que existen para su administración. Muchas son las metodologías empleadas. Y, si bien algunas funcionan, otras no son acertadas para hacer del inventario el mejor activo posible (López, 2001).

[3] Es la curva que, entre dos puntos, hace el recorrido en el menor tiempo posible. Algunas de las soluciones a este problema las propusieron L'hopital, Newton, Bellman (Hoyos, 2011).

[4] Entre dos curvas cuál es la que maximiza el perímetro al encerrarla (Hoyos, 2011).

Objetivo de la TCO:

Según Dreyfus (citado por Alonso y Uria, 1996), "el objetivo, en sentido amplio, de esta teoría es conseguir que un sistema funcione de un modo más conveniente, se trata optimizar el comportamiento del sistema, cuando ello sea posible. El problema central de cualquier intento de optimización es la búsqueda de un control que maximice o minimice un criterio representativo de la eficiencia del sistema" (p. 3).

2.1 Identificación de los elementos en la TCO

Función objetivo:

Para poder definir la función objetivo, es necesario tener claro el comportamiento del sistema, el cual, en la mayoría de los casos, es abierto y susceptible de cambios en el tiempo (dinámico). Algunas de las variables que se identifican son las siguientes:

Variables de control:

Según Alonso y Uria (1996) "son variables elegidas en cursos[5] temporales dentro de una clase de cursos dada que se denomina *conjunto de control*". La elección de estas trayectorias temporales para las variables de control se hace a través de una serie de ecuaciones diferenciales —*ecuaciones de movimiento*—" (p. 8).

Variables de estado:

"Son las variables que describen el estado del sistema en el momento en el que se conoce cómo se dan sus movimientos a través de las ecuaciones diferenciales" (Alonso y Uria, 1996, p. 10).

A continuación, se presenta el modelo de solución del problema del control utilizado por Alonso y Uria (1996) tomando como referencia la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

[5] Estos son todos los puntos del horizonte temporal.

1. Planteamiento formal de problema

Se definen las escalas de tiempo como eventos continuos: $t_o \leq t \leq t_1$, mientras las variables de estado como *n* número naturales que son componentes del *vector de estado*:

Ecuación (1)

$$X(t) = \{X_1(t),\ X_2(t),\ \ldots.\ X_n(t)\}$$

Las variables de control son *n* números reales componentes del *vector de control*:

Ecuación (2)

$$U(t) = \{U_1(t),\ U_2(t),\ \ldots.\ U_n(t)\}$$

Se definen las ecuaciones de movimiento:

Ecuación (3)

$$\dot{X} = f(x(t), u(t), t)$$

Se define la función objetivo:

Ecuación (4)

$$= J\{U(T)\} = \int_{t_0}^{t_1} I(x(t), u(t), t)\,dt + F(x_1, t_1)$$

Finalmente, el *problema del control* para un modelo que busca maximizar queda definido así:

Ecuación (5)

$$Max\ \ J = \int_{t_0}^{t_1} I(X, U, t)\,dt + F(x_1, t_1)$$

Sujeto a

Ecuación (6)

$$\dot{X} = f(x, u, t)$$

$$t_0 \ \ y\ \ x(t_0) = x_0 \ \ \text{dado}$$

$$(x(t), t) \epsilon\ T\ \ en\ \ t = t_1$$

$$\{u(t)\} \in U$$

2. Solución del problema del control

Método del lagrangiano:

Ecuación (7)

$$L(x, \dot{X},\ t, \lambda) = F(x, \dot{X}, t) + \lambda\left[b - g(x, \dot{X}, t)\right]$$

Ecuación de Euler (tomada del lagrangiano):

Ecuación (8)

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}}\right) = 0$$

Construcción del hamiltoniano como solución inicial del máximo de Pontrygain:

Ecuación (9)

$$H = F(x(t), u(t), t) + \lambda(t)\, f(x(t), u(t), t)$$

3. Los inventarios: sistema susceptible de ser controlado

El control sobre los inventarios es un factor determinante de los costos y utilidades de una organización (Muller, 2004). La estructura para representar el inventario en busca de aplicar TCO se presenta en la figura 1.

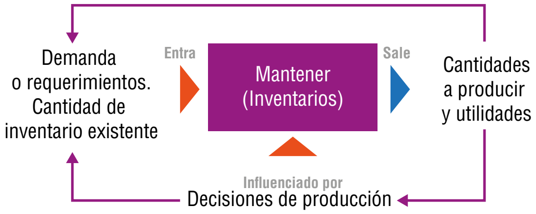

Figura 1. Figura que muestra el flujo dinámico de los inventarios.
Fuente: elaboración propia.

Este es un modelo de un sistema dinámico, pues busca analizar el comportamiento y la manera óptima de administrar un sistema de producción —inventario— en el tiempo.

Como entradas se tiene una cantidad de inventario existente y una demanda esperada, que provocan los movimientos de venta. Las salidas del inventario dan cuenta de cuánto se debe producir para satisfacer esa demanda y reflejar las utilidades. El sistema es retroalimentado y controlado por una serie de decisiones de producción que responden a las preguntas de ¿cuánto producir y enviar? y en ¿qué momento? Con base en estas decisiones se puede controlar todo el sistema y maximizar las utilidades, teniendo en cuenta los efectos a largo plazo.

4. Tipo de modelo a estudiar

Los modelos de inventarios pueden ser llevados al modelo TCO, ya que este tiene un vector costo para minimizar y/o vector utilidad para maximizar. Por ser un sistema abierto, su movimiento o comportamiento puede ser descrito a través de una ecuación diferencial ordinaria. Los vectores de control y de estado se pueden deducir de las ecuaciones de movimiento. Y las restricciones asociadas al problema del control bien pueden darse en términos de disponibilidad de recursos o de un estado esperado (probable).

Para poder cumplir los objetivos de los inventarios, los departamentos de una organización (tomadores de decisiones sobre la producción y los inventarios) deben desarrollar un modelo o una metodología que les permita administrar de la mejor manera posible los inventarios. Y en esa tarea la TCO puede ser una herramienta muy útil, dadas su exactitud y confiabilidad.

5. Aportes de la TCO a la gestión de inventarios

En esta sección se mostrarán los diferentes aportes de la TCO a la gestión de inventarios, vista como un sistema dinámico.

5.1 "Optimal Control of Production Inventory Systems with Deteriorating Items and Dynamic Costs"

Esta investigación de Benhadid, Tadj y Bounkhel (2008) presenta la solución al problema del control óptimo de inventarios con bienes que se deterioran y, luego, muestra el efecto sobre sus costos, con política de revisión continua.

Los autores usan la TCO para encontrar los caminos o tomar las decisiones óptimas que minimizen los costos de inventarios. Se interesa principalmente en mostrar una frontera de producción con variación en el tiempo (dinámica) teniendo en cuenta una demanda esperada, el deterioro de los bienes en *stock* en el tiempo y las "faltas" o costos causados cuando un bien se deteriora o no se atiende una demanda a tiempo.

El modelo, define: T: tiempo (horizonte) de planeación; ρ: constante de deterioro; I_0: nivel de inventario inicial; $h(t)$: costo de mantener; $K(t)$: costo de producir; $I(t)$: nivel de inventario en el tiempo, $P(t)$: nivel de producción en el tiempo, $D(t)$: nivel de demanda en el tiempo, $\theta(t)$: nivel de deterioro en el tiempo, $\hat{I}(t)$: nivel de inventario esperado en el tiempo $\hat{P}(t)$: nivel de producción esperada en el tiempo. Con la siguiente función objetivo:

Ecuación (10)

$$\min_{P(t)\geq 0} = \int_{o}^{T} F\big(t, I(t),\ P(t)\big)\,dt$$

Donde

Ecuación (11)

$$F(t,I(t),\ P(t)) = \frac{1}{2} e^{-\rho t} \left\{ h(t)\Delta^2 I(t) + K(t)\Delta^2 P(t) \right\}$$

Ecuación (12)

$$\Delta I(t) = I(t) - \hat{I}(t) \ \ y \ \ \Delta P(t) = P(t) - \hat{P}(t)$$

Sujeto a

Ecuación (13)

$$\frac{d}{dt} I(t) = P(t) - D(t) - \theta(t) I(t)$$

Al solucionar el modelo, se encontró la *ecuación 14*, que representa el comportamiento del sistema, y la figura 2 presenta la aplicación en un caso de estudio, que muestran el comportamiento del nivel de inventario y de producción en el tiempo real versus el esperado.

Ecuación (14)

$$\frac{d}{dt}\Delta P(t) + \left[\frac{\frac{d}{dt}K(t)}{K(t)} - \rho - \theta(t) \right] \Delta P(t) = \frac{h(t)}{K(t)} \Delta I(t)$$

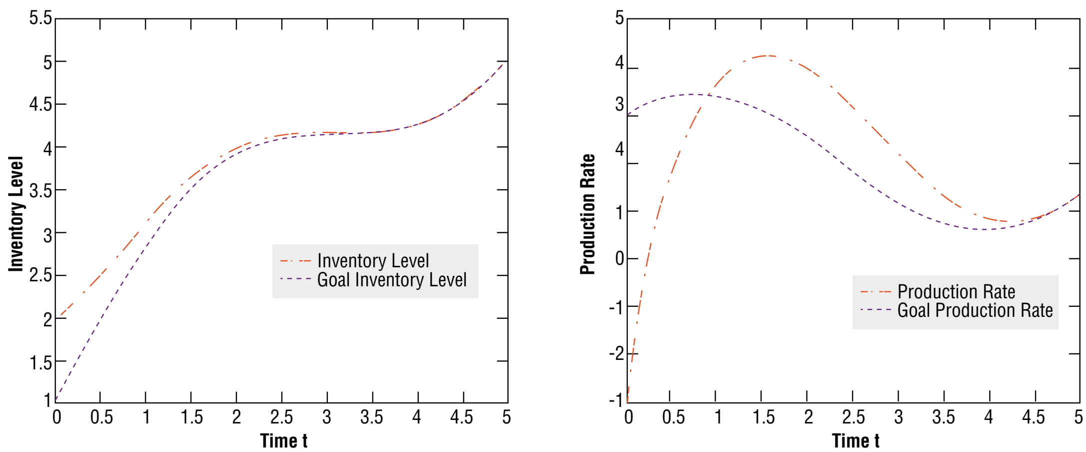

Figura 2. Gráfica de nivel de inventario esperado vs. nivel de inventario obtenido, y producción esperada vs. nivel de producción obtenida.
Fuente: Benhadid, Tadj y Bounkhel (2007).

5.2 "Optimal Production Control in Stochastic Manufacturing Systems with Degenerate Demand"

Este artículo de Bauten y Abdulbasah (2011) trata el problema del control del inventario con producción estocástica, demanda que decrece en el tiempo y tiempo de espera de los productos para ser despachados. A través de la combinación de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman y programación dinámica, se obtiene la solución del problema. El autor se apoya en autores como Morimoto y Kawaguchi (2002) y Baten y Morimoto (2005) para desarrollar el modelo de control del inventario derivado de la relación inventario-demanda, que evoluciona según la ecuación estocástica neoclásica conocida como *Itô's lemma*[6].

Una vez obtenido el modelo, evalúa el costo mínimo de la política aplicada.

Las formulaciones hechas por Bauten y Abdulbasah (2011) incluyen adicionalmente

[6] "Es una identidad usada en el cálculo Itô para encontrar el diferencial de una función dependiente del tiempo de un proceso estocástico" (Itô, 1951).

los siguientes parámetros: β: tasa de descuento con restricción de no negatividad, $w(t)$: un movimiento browniano estándar unidimensional en un espacio de probabilidad completa, σ: movimiento estocástico. Con esto, se obtiene la siguiente formulación:

Ecuación (15)

$$J(K(t)_{Min} = E\int_0^\infty e^{-\beta t}\left\{f(I(t)+K(t)^2\right\}dt$$

Sujeto a

Ecuación (16)

$$\frac{dI}{dt} = [K(t)-D(t)]$$

Ecuación (17)

$$\frac{dD}{dt} = AD(t)+\sigma D(t)dw(t)$$

Así, a través del principio de programación dinámica y de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman, da la siguiente solución:

Ecuación (18)

$$-\beta u(I(t),D(t)+\frac{1}{2}\sigma^2 D(t)^2 u_{DD}$$
$$+AD(t)u_D - D(t)u_I + F^\star(u_I)+h(I(t)) = 0$$

5.3 "An Optimal Control Approach to Inventory-Production Systems with Weibull Distributed Deterioration"

Este artículo de Kamil (2007) trabaja un sistema de producción-inventario con distribución de Weibull[7]. La solución óptima se encuentra como una ecuación de Ricatti derivada de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman.

El modelo busca un equilibrio óptimo entre picos de producción y mínimos costos para mantener los inventarios. Además, plantea una distribución de Weibull para evidenciar el posible deterioro de los bienes en el almacén, junto con los niveles de demanda esperados. El problema de control propuesto define: $x(t)$: nivel del inventario en una planeación t; $t \in [0,T]$, $\hat{x}(t)$: nivel de inventario esperado; $h(t)$: costos asociados a mantener un nivel de inventario; $u(t) \geq 0$: función asociada al número de unidades producidas en el tiempo t; $t \in [0,T]$, $\hat{u}(t)$: nivel de producción esperada, $C(t) > 0$: costos asociados a la producción, $y(t)$: nivel de demanda en el tiempo t; $t \in [0,T]$.

Para solucionarlo (Kamil, 2007) propone un modelo en función de variables matriciales, donde, $Q(t)$: matriz real semidefinida para operaciones de la variable inventarios; $R(t)$: matriz real semidefinida para operaciones de la variable demanda y $A_1(t)$ y $B_1(t)$: corresponden a sistema de matrices dinámicas.

Ecuación (19)

$$\min J = \frac{1}{2}\int_0^T \left\{\begin{matrix} Z^T Q(t) Z(t) \\ +K^T(t)R(t)K(t) \end{matrix}\right\} dt$$

Donde

Ecuación (20)

$$Z(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Ecuación (21)

$$K(t) = u(t) - \hat{u}(t)$$

Sujeto a

Ecuación (22)

$$\frac{dZ}{dt} = [A_1(t)Z(t)+B_1(t)K(t)+V(t)]$$

Ecuación (23)

$$V(t) = \hat{u}(t) - y(t) - \eta\gamma t^{\gamma-1}x(t)$$

7 "Es una distribución de probabilidad continua. Es usada para describir la distribución de los tamaños de determinadas partículas […]. En ingeniería, para modelar procesos estocásticos relacionados con el tiempo de fabricación y distribución de bienes" (Johnson, Kotz, & Balakrishnan, 1994).

Al resolver este problema de control propuesto, se utilizó el principio del máximo de Pontrygain y la matriz de Ricatti. De ese modo, se encontró la siguiente solución:

Ecuación (24)

$$K(t) = -hC^{-1}\left(\eta\gamma t^{\gamma-1}\right)^{-1} Z(t)$$

La anterior función es el control de la producción que identifica una cantidad de inventario que minimiza los costos. Este modelo puede seguirse refinando para maximizar la utilidad.

5.4 "Optimal Control of a Production System with Inventory-Level-Dependent Demand"

Messaoud (2005) desarrolla un modelo de control óptimo asociado a la gestión del sistema dinámico de producción inventario. El autor toma en cuenta todas las variables como dependientes del tiempo. La demanda, en especial, se convierte en un parámetro de análisis del sistema, con el fin de ver los efectos de los cambios de esta en los aumentos del costo de mantener el inventario. Para la producción, considera un solo producto y las decisiones se dan sobre todo por el horizonte de planeación, es decir, con una política continua. La variable de estado es el inventario y la variable de control es la producción. El modelo formulado por Messaoud (2005), tomando la misma nomenclatura de Benhadid, Tadj y Bounkhel (2008), es el siguiente:

Ecuación (25)

$$\underset{P(t)\geq D(t)}{min} = J(P,I) = e^{-\rho t}\int_0^T \{h\left(I(t)\right) + K\left(P(t)\right)\}dt$$

Sujeto a

Ecuación (26)

$$\frac{dI}{dt} = P(t) - D\left(t, I(t)\right)$$

$$I(0) = I_0 \quad I(T) = I_T$$

Para solucionar este problema de control, el autor utiliza el principio del máximo de Pontrygain. Así llega a un sistema de ecuaciones diferenciales en el que las soluciones son las funciones de producción y de inventario que se muestran a continuación:

Ecuación (27)

$$I^*(t) = a_1 e^{(m_1 t)} + a_2 e^{(m_2 t)} + Q(t)$$

Ecuación (28)

$$P^*(t) = a_1\left(m_1 + d_2\right)e^{m_1 t} + a_2\left(m_2 + d_2\right)e^{m_2 t} + \frac{dQ}{dt} + d_1(t)$$

Donde

Ecuación (29)

$$m_1 = \frac{1}{2}\left(\rho - \sqrt{\rho^2 + 4\left[\frac{h}{k} + \left(\rho + d_2\right)d_2\right]}\right) < 0$$

Ecuación (30)

$$m_2 = \frac{1}{2}\left(\rho + \sqrt{\rho^2 + 4\left[\frac{h}{k} + \left(\rho + d_2\right)d_2\right]}\right) > 0$$

Con

$$a_1 + a_2 = b_1; \; a_1 e^{m_1 T} + a_2 e^{m_2 T} = b_2;$$

$$a_1 = (b_2 - a_2 e^{m_2 T} b_1) \,/\, (e^{m_1 T} - e^{m_2 T});$$

$$a_2 = \left(b_1 - a_2 e^{m_2 T} b_2\right) / \left(e^{m_1 T} - e^{m_2 T}\right)$$

Obtenidos a partir de la solución de la ecuación diferencial.

Al encontrar las funciones de inventario y de producción óptimas se hallan constantes como a_1; a_2;b_1;b_2 que dan la solución particular obtenida de las ecuaciones diferenciales propuestas por el principio de Pontrygain. Así, se encuentra el mínimo costo (J) en el horizonte de planeación.

5.5 "Optimal Control of a Production Inventory"

En este artículo, Alkhedhairi y Tadj (2006) trabajan en un sistema de producción-inventario con la misma estructura de Benhadid, Tadj y Bounkhel (2007), con una función de distribución de probabilidad de Weibull para el deterioro. Así, se llega a una ecuación diferencial de segundo orden que no es solucionada por los autores, pero que corresponde a la solución óptima:

Ecuación (31)

$$\ddot{I}(t)-\left[\frac{h}{k}+\alpha\beta(\alpha\beta-1)t^{\beta-1}\right]I(t)=$$
$$\alpha\beta t^{\beta-1}\left[D(t)-\hat{P}(t)\right]-\frac{\lambda}{K}\hat{I}+\dot{\hat{P}}(t)-\dot{D}(t)$$

Alkhedhairi y Tadj (2006) en los resultados del artículo presentan un caso de niveles de inventario y producción que se acercan prontamente a los esperados, en busca de minimizar el costo del sistema de producción inventario en el tiempo.

6. Conclusiones

En su mayoría, los cinco estudios descritos usan como variable de estado los inventarios y como variable de control, la producción. Esto resulta conveniente desde el punto de vista metodológico, para lograr el mejor estado de sus inventarios, es decir, el que se logra a un costo mínimo y sin faltantes, siempre y cuando tome buenas decisiones de producción.

Existen variables adicionales que proporcionan un análisis más específico. Es el caso de la demanda, que tiene un impacto directo sobre el costo del inventario o costos por no cumplir con la cantidad demandada (faltantes). También se analiza el caso de los bienes que con el tiempo tienen un deterioro, pues estos acarrean costos adicionales, de modo las estrategias de despacho y reabastecimiento tienen que estar muy bien orientadas a evitar los costos por pérdida de producto. Otro aporte notable en tales variaciones es utilizar variables como la demanda en distribuciones de probabilidad de Weibull, pues permite hacer análisis estocásticos de mayor exactitud.

Finalmente, el aporte teórico más importante es usar la TCO misma para hacer una gestión de inventarios que minimice los costos asociados a ellos. La TCO es una herramienta matemática que ofrece ecuaciones dependientes del tiempo con las cuales se pueden hacer planeaciones y evidenciar los estados del inventario con el paso del tiempo. Al saber los posibles estados —análisis probabilísticos— se puede empezar a tomar decisiones, en el momento cero o actual, para evitar costos altos o pérdidas.

Los análisis matemáticos son muy amplios y de vital importancia teórica. Por tanto, los autores han notado que es posible aplicar la TCO usando teorías económicas (microeconómicas); es decir, de modo que se incluyan variables como los precios, el estado competitivo de la organización y una mayor especificación del tratamiento de almacenamiento de diferentes tipos de bienes, después de haber hecho un análisis de elasticidad de precios relacionado con las cantidades de producción.

Referencias

Alkhedhairi, A. y Tadj, L. (2006). Optimal Control of a Production Inventory. *Applied Mathematical Sciences, 1* (35), 1703-1714.

Alonso, B. P. y Uria, M.V. (1996). Problemas de Control Óptimo con restricciones: Aplicaciones Económicas. Consultado en https://goo.gl/X5FX7m.

Baten, A. y Morimoto, H. (2005). An Extension of the linear regulator for degenerate difussions. *IEEE Transactions on Automatic Control, 50* (11), 1822-1826.

Bauten, A. y Abdulbasah, A. (2011). Optimal Production Control Stochastic Manufacturing Systems with Degenerate Demand. *East Asian Journal on Applied Mathematics, 1* (1), 89-96.

Benhadid, Y., Tadj, L. y Bounkhel, M. (2008). Optimal Control of Production Inventory Systems With Deteriorating Items and Dynamic Costs. *Applied Mathematics Enotes*, *8* (2008), 194-202.

Burlisch, R., Miele, A., Stoer, J. y Well, K. H. (1993). *Optimal Control and the Calculus of Variations*. New York: Oxford University Press.

Cara, E. F., An., E. D. y Zuazua, E. (2005). Las matemáticas. Sevilla, España.

Chinchuluun, A., Pardalos, P.M., Enkhbat, R. y Tseveendorj, I. (eds.) (2010). *Optimization and optimal control*. Rusia: Springer.

Clason, C. I. (2015). A convex analysis approach to optimal controls with switching structure for partial differential equations. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, *22* (2), 581-609.

Dreyfus. (1965). Dreyfus, S. E. (1965). *Dynamic programming and the calculus of variations* (Vol. 21). New York: Academic Press.

Ferreyra, G. y Pascal, J. (1999). Control óptimo determinista, vía programación dinámica. *Divulgaciones Matemáticas, 7* (2), 167-185.

Groover, M. P. (2007). *Fundamentos de manufactura moderna*. México D. F.: McGraw Hill.

Itô, K. (1951). *On stochastic differential equation*. Consultado en https://goo.gl/IJbG8c.

Kamil, M. A. (2007). An Optimal Control Of A Production Inventory System with Weibull Distributed Deterioration. *Journal of Mathematics and Statistics*, *1* (35), 206-214.

López, D. M. (2001). *Modelos de inventarios determinísticos*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Messaoud, L. T. (2005). Optimal Control of a Production System With Inventory LevelDependent Demand. *Applied Mathematics Enotes, 5* (2005), 36-43.

Morimoto, H. y Kawaguchi, K. (2002). Optimal Exploitation of Renawable Resources by the Viscosity Solution method. *Stochastic Analysis and Applications, 20* (5), 927-946.

Muller, M. (2004). *Fundamentos de administración de inventarios*. Bogotá: Editorial Norma.

Parra, J. F. (1992). Investigación de operaciones. *Boletín de Matemáticas*, 170-197.