Las obras de Escher y la geometría hiperbólica

The Escher's artworks and hyperbolic geometry

Rafael Melo Jiménez[1]

Resumen

Estamos demasiado acostumbrados a utilizar la geometría euclidiana para describir situaciones y observar el mundo. Esto nos limita bastante, ya que solo nos basamos en una manera de percibir las cosas. El artista holandés M. C. Escher logró romper esas barreras y, al contemplar la realidad de una forma diferente, creó obras tales como *círculo límite IV*, que evidentemente pertenece a un universo regido por reglas muy diferentes. Este universo es el de la geometría hiperbólica bidimensional, que se describe perfectamente mediante el modelo del disco de Poincaré. El objetivo principal de este artículo es el de formar un puente entre dicho universo y nuestro universo euclidiano e introducir al lector en ese nuevo mundo para hacerlo partícipe de las reglas que lo gobiernan y así dotarlo de la capacidad para dar una apreciación distinta a la acostumbrada en sus principales campos de interés. De esta manera, el lector tendrá una visión evolucionada y podrá descubrir significados que antes quizá permanecían ocultos.

Palabras clave: teselado, heometría euclidiana, geometría hiperbólica, disco de poincaré, métrica.

Abstract

We are too accustomed to using Euclidean geometry to describe situations and observe the world. This limits us quite in the sense that we have only one way of perceiving things. The dutch artist M. C. Escher managed to break those barriers, and to contemplate the reality in a different way, he came to the creation of works such as *Circle limit IV*, which obviously belongs to an universe governed by very different rules. This universe is the two-dimensional hyperbolic geometry, which is described perfectly by the Poincaré disk model. The main objective of this article is to form a bridge between this universe and our Euclidean universe, and introduce the reader to this new world to make it a participant in the rules that govern it and thus giving it the ability to give a different assessment to used in its main fields of interest. Thus the reader will have an evolved vision and may perhaps discover meanings that were hidden before.

Keywords: tessellation, euclidian geometry, hyperbolic geometry, poincare's disk, metric.

1 Magíster en Ciencias (matemáticas). Docente del Departamento de Matemáticas, Universidad Central. Correo: rmeloj@ucentral.edu.co.

1. Introducción

A veces nos acostumbramos a hacer las cosas siempre de una misma manera. Tanto así que, cuando tenemos la oportunidad de tomar otro camino, preferimos irnos por el viejo, ya sea porque nos sentimos más seguros en él o tal vez porque pensamos que es más rápido. Sin embargo, como todo en la vida, un nuevo camino está lleno de nuevas experiencias. Por esta razón, nos estamos perdiendo de miles de ideas por no romper la rutina; más aún, estamos andando ciegos por un mundo lleno de significados encriptados. En este escrito encontrará una invitación a dejar los caminos que solemos tomar al realizar alguna actividad. Al profundizar en sus líneas, verá que dicha invitación está al alcance de todos.

Este artículo está dividido en tres partes principales para su mejor comprensión: en la primera, se actualizará al lector con respecto a las obras del popular artista holandés Maurits Cornelis Escher; en la segunda, se dará una introducción al mundo de la geometría hiperbólica, utilizando, para ello, el modelo del disco de Poincaré; en la tercera y última, ya con lo que se ha aprendido, el lector descubrirá algunas grandes diferencias entre las geometrías mencionadas y ahora entenderá que ver *Círculo Límite IV* es, en realidad, tan normal como ver el atardecer sobre el horizonte de un mundo localmente euclidiano.

2. Maurits Cornelis Escher

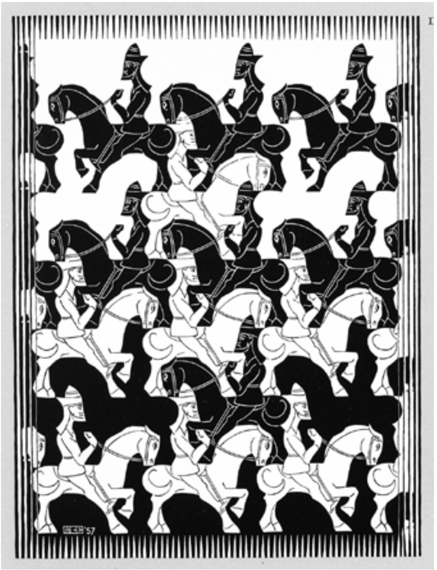
M. C. Escher nació en Leewarden, Holanda, el 17 de julio de 1898. Su padre era ingeniero civil. Tres de sus cuatro hermanos siguieron carreras en los campos de las ciencias y la ingeniería. En contraste, Escher no tenía interés por las matemáticas, y se inclinó por las artes gráficas. A estas se dedicó toda su vida, que terminó en Hilversum, Holanda, el 27 de marzo de 1972 (Rojo, 2008; Corrales, 2005).

La forma poco usual en que Escher maneja el espacio en sus trabajos fascina a cualquier persona del ámbito científico o ingenieril. Por esto, sus obras son frecuentemente utilizadas en las portadas de revistas o libros. De ahí viene su fama. Además, para una persona que ha recibido alguna formación en ciencias puras, le es evidente que estas obras representan herramientas matemáticas sofisticadas. Una de esas herramientas es la geometría hiperbólica, lo que significa que esta rama de la matemática está ligada a la percepción humana (Carrión y Pagés, 2013; Gupta, 2006; Serrentino, 2008).

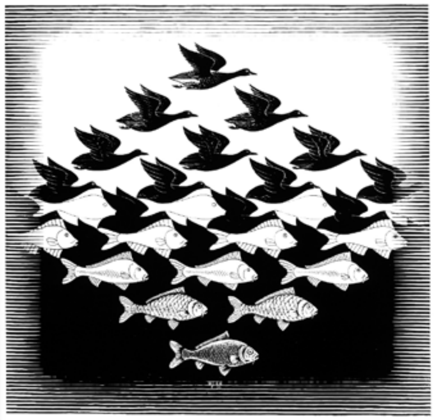
Escher manejó varios temas en sus trabajos. Entre los principales, se encuentran los siguientes: *perspectivas inusuales*, *simetrías y periodicidades*, *transmutaciones graduales* y *representaciones del infinito* (figura 1).

Escher estaba fascinado con la *representación del infinito en un espacio finito*. Sin embargo, en algún punto debió llegar a un paro brusco en alguna parte de la obra. Escher no estaba satisfecho con esta y, después de varios intentos, llegó finalmente a sus obras *Círculo límite III* y *Círculo Límite IV* (figura 2), que son las más destacadas en este género.

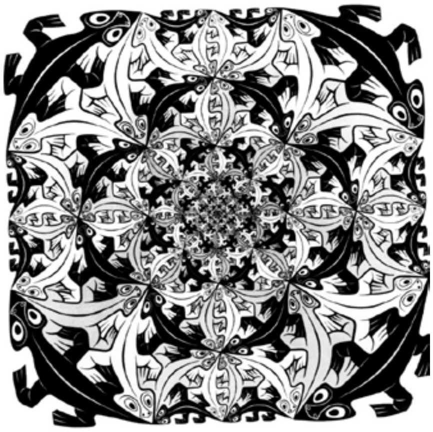
a



b



c



d

Figura 1. Representación de los campos de trabajo en la obra de Escher: (a) perspectivas inusuales, (b) simetrías y periodicidades, (c) transmutaciones graduales y (d) representaciones del infinito. Fuente: www.mcescher.com.

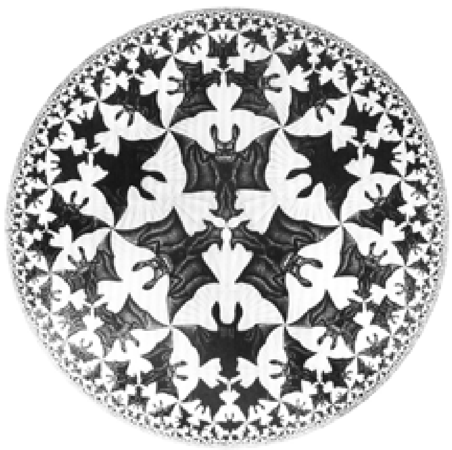


Figura 2. *Círculo límite III* y *Círculo Límite IV*.
Fuente: www.mcescher.com.

3. Geometría hiperbólica

La geometría hiperbólica es la geometría que resulta al considerar los cuatro primeros postulados de Euclides (Delgado Vásquez, 2004), junto con la negación del quinto[2] (Lascurain, 2005), en la forma "dada una recta y un punto fuera de ella, entonces existe más de una recta paralela a la recta dada que pasa por el punto dado" (Lessa, 2012). Para apreciar la manera en que funciona, describiremos, paso a paso, el modelo del disco de Poincaré (Mena, 2011).

Definición:

Se considerará un círculo euclidiano cualquiera. Sea *D* el conjunto de todos los puntos interiores de dicho círculo euclidiano (es decir, sin sus puntos frontera), *D* será llamado el *plano hiperbólico*, y un punto de *D* será llamado *punto hiperbólico*.

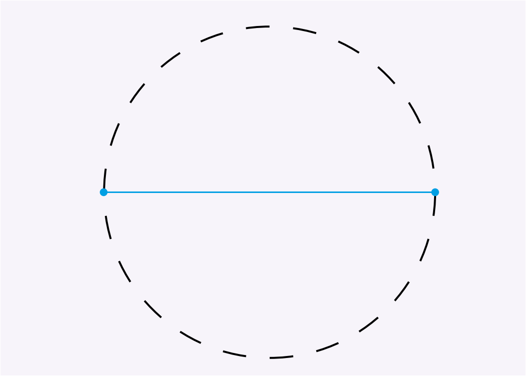
Definición:

Una *recta hiperbólica* es o un diámetro de *D* o un arco de una circunferencia euclidiana exterior que se cruza con *D* de tal forma que los radios en uno de los respectivos puntos de intersección sean perpendiculares en el sentido euclidiano.

Nota:

Por simplicidad, en algunas ocasiones, llamaremos a los puntos hiperbólicos y a las rectas hiperbólicas simplemente puntos y rectas, respectivamente.

Algunos ejemplos de rectas hiperbólicas se pueden apreciar en la figura 3.



[2] Hay otra forma de negar el quinto postulado y que da lugar a la llamada geometría elíptica. Esta otra forma es: "dada una recta y un punto fuera de ella, entonces no existe ninguna recta paralela a la recta dada que pasa por el punto dado" (Perez Muñoz, 2004).

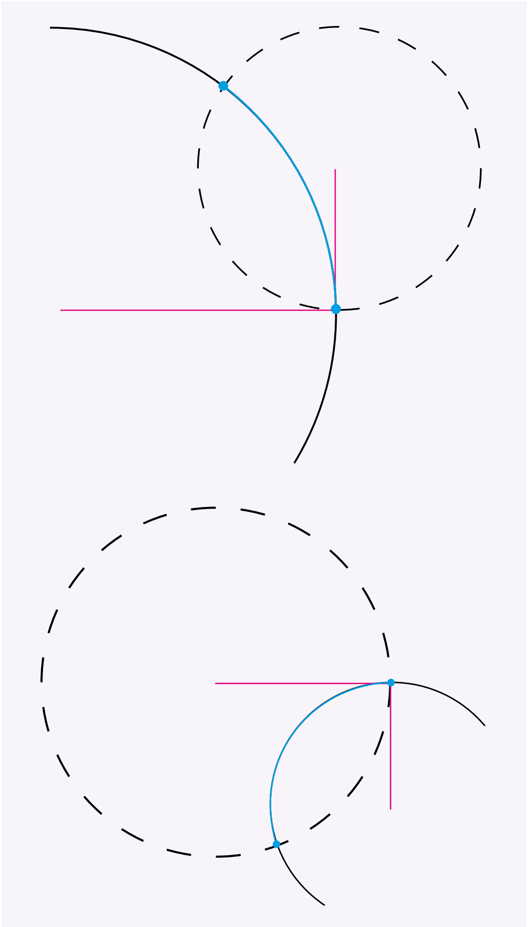


Figura 3. Rectas hiperbólicas
Fuente: elaboración propia.

Observación:

De los gráficos anteriores es claro que ninguna de las circunferencias exteriores que determinan una recta hiperbólica se intersectará dos veces con algún diámetro de D.

Nota:

Con este concepto de rectas hiperbólicas podemos verificar fácilmente el quinto postulado. Al igual que en la geometría euclidiana, en la geometría hiperbólica dos rectas son paralelas si nunca se cruzan. Teniendo esto en cuenta, sean ℓ una recta y P un punto fuera de ella. En la figura 4 se ve que las rectas ℓ', ℓ'' y ℓ''' contienen al punto P, y que además son paralelas a la recta dada .

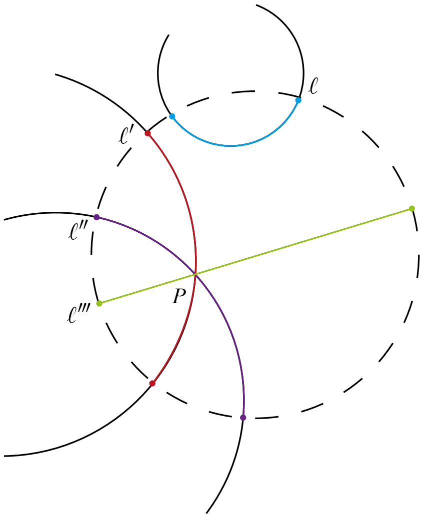


Figura 4. Rectas paralelas
Fuente: elaboración propia.

Teorema: si P y Q son dos puntos distintos de D, entonces existe una única recta ℓ que los contiene.

Demostración: se presentan dos casos:

1. Cuando los puntos P y Q son colineales[3] con el centro de D.

Existencia:

Por ser los puntos colineales, existe una recta euclidiana que los contiene a todos. Esta recta euclidiana, al contener en particular al centro de D, determinará uno de sus diámetros. Este diámetro es la recta hiperbólica ℓ que buscábamos.

Unicidad:

Si existiera otra recta hiperbólica ℓ' diferente de ℓ que pasara por los puntos P y Q, esta no tendría más remedio que ser un arco de circunferencia. Sin embargo, como se puede apreciar en la figura 5, la circunferencia exterior que conforma este arco necesariamente intersectaría dos veces el diámetro ℓ de D formado anteriormente. Esto contradice la observación anterior, por lo que no puede existir tal otra recta.

[3] Tres puntos diferentes se dicen colineales, si existe una recta que los contenga a todos.

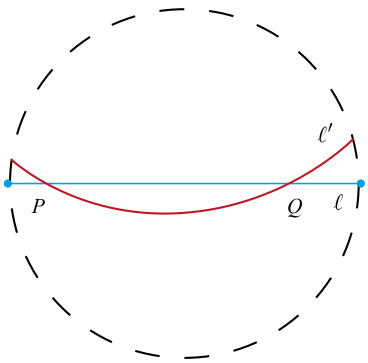


Figura 5. Dos rectas hiperbólicas
Fuente: elaboración propia.

2. Cuando los puntos P y Q no son colineales con el centro de D.

Existencia:

sin pérdida de generalidad, ubiquemos, por comodidad, los puntos P y Q como se muestra en la figura 6. Es claro que la recta hiperbólica ℓ buscada debe ser un arco de una circunferencia exterior que contiene a P y Q. Bastará con localizar el centro de dicha circunferencia. Para ello, tracemos el segmento de recta euclidiano $\overline{PQ}$ y consideremos el rayo que parte del punto medio de dicho segmento hacia afuera. Denotemos por R' un punto cualquiera de la circunferencia (frontera) de D que está arriba del segmento $\overline{PQ}$. Tracemos la recta tangente a D en este punto y denotemos por R'' el punto del rayo que se intersecta con la mencionada recta tangente. Al mover R' sobre la circunferencia de D, hasta que el segmento $\overline{R'R''}$ tenga la misma longitud que el segmento $\overline{PR''}$ o que el segmento $\overline{QR''}$ —da igual—, el punto R'' se convertirá en un único punto R el cual será el centro de la circunferencia exterior que determina la recta buscada.

Unicidad:

Si existiera otra recta hiperbólica ℓ' diferente de ℓ que pasara por los puntos P y Q, por la unicidad del punto R en la parte anterior, esta no tendría más remedio que ser un arco de circunferencia que va en sentido contrario al construido anteriormente. Sin embargo, como se puede apreciar en la figura 6, este arco necesariamente intersectaría dos veces el diámetro de D, determinado por su centro y por P. Esto contradice la observación anterior, por lo que no puede existir tal otra recta. Ahora que sabemos que en D dos puntos distintos determinan una única recta (igual que en el plano euclidiano), podemos introducir la noción de distancia.

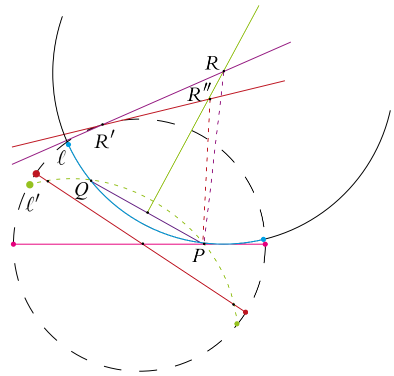


Figura 6. Unicidad
Fuente: elaboración propia.

Definición:

sean P y Q dos puntos distintos de D, y sea ℓ la única recta que los contiene. Denotemos por A y B los puntos límite de la recta ℓ (figura 7). Consideremos los segmentos de recta euclidianos $\overline{PA}, \overline{PB}, \overline{QA}, \overline{QB}$, junto con sus respectivas longitudes euclidianas $|\overline{PA}|, |\overline{PB}|, |\overline{QA}|, |\overline{QB}|$. Se define la *distancia hiperbólica* entre los puntos P y Q, denotada por $d_H(P,Q)$, mediante la fórmula:

$$d_H(P,Q)=\left|\ln\left(\frac{|\overline{PB}|\cdot|\overline{QA}|}{|\overline{QB}|\cdot|\overline{PA}|}\right)\right|$$

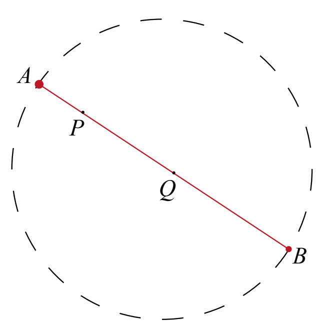


Figura 7. Diámetro
Fuente: elaboración propia.

Esta definición verifica las propiedades de una métrica y fue introducida por el matemático británico Arthur Cayley (1821-1895) (Salcedo Martínez, 2011).

Observación:

Podemos entender un poco el comportamiento de esta métrica considerando el caso particular en que el punto *P* permanece fijo y es el centro de *D*. En este caso, las cantidades $\left|\overline{PA}\right|$ y $\left|\overline{PB}\right|$ son iguales y, por lo tanto, se anulan en la fórmula de $d_H(P,Q)$. Ahora tomemos el punto Q y acerquémoslo más y más hacia la frontera a lo largo de la recta (diámetro) ℓ. La cantidad $\left|\overline{QA}\right|$ del numerador está acotada, pues tiende al valor del diámetro del círculo *D*, mientras que la cantidad $\left|\overline{QB}\right|$ del denominador tiende a cero; por lo tanto, el cociente $\left|\overline{QA}\right| \gamma \left|\overline{QB}\right|$ tiende a infinito. Y como la función logaritmo natural es creciente y no acotada, la distancia $d_H(P,Q)$ entre *P* y Q tiende a infinito. En otras palabras, la distancia del centro de *D* a su frontera es infinita.

4. Ojos hiperbólicos

Consideremos nuevamente el *Círculo Límite IV* (figura 2). Observemos que el tamaño de los ángeles y demonios decrece paulatinamente del centro al perímetro, hasta que se pierden en el límite visual identificable. Este es justamente el comportamiento que presenta la métrica definida sobre el plano hiperbólico *D*. Nosotros, como observadores euclidianos, tenemos la impresión de que las figuras pierden tamaño conforme se acercan a la frontera del disco. Pero para dichas figuras la realidad es hiperbólica, por lo que ninguna se siente limitada por la frontera, pues la distancia a ella es infinita, más aún, cada una de ellas se percibe del mismo tamaño que las demás. Visto de esta forma, las obras son un mosaico periódico, con piezas de tamaño constante y periodicidad uniforme en el espacio hiperbólico, o mejor, un teselado[4] regular (Mendoza Ramírez, 2011) en el cual las piezas individuales han sido rotadas. Esto quiere decir que si tuviéramos ojos hiperbólicos veríamos al *Círculo Límite IV* como se muestra en la figura 8.

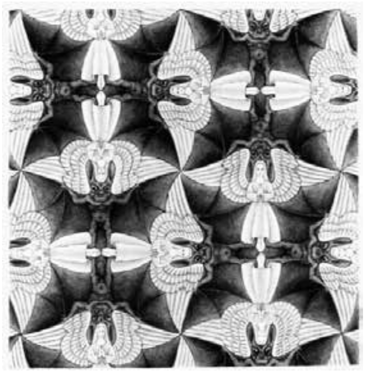


Figura 8. Ángeles y demonios.
Fuente: www.mcescher.com.

5. Conclusiones

En un mundo donde reine la geometría hiperbólica, las cosas se comportarían de un modo tan distinto que pensaríamos que estamos locos.

La geometría euclidiana es la geometría de la intuición (Escobar Acosta, 2005). Por esa razón, pensamos que es la más correcta para describir ciertas situaciones.

Escher demostró que la geometría hiperbólica está ligada a nuestra intuición, pues no tenía conocimientos matemáticos y, sin embargo, utilizó ideas de esta geometría para realizar algunas de sus obras.

4 Un teselado es un patrón de figuras que cubre completamente una superficie plana de tal forma que no queden huecos y no se superpongan las figuras.

Podemos llegar a grandes resultados si dejamos de lado lo acostumbrado y tomamos el camino más largo.

Dos personas pueden estar viendo un mismo objeto y, sin embargo, pueden estar apreciando dos cosas completamente distintas.

Referencias

Carrión, M.T. y Pagés, D. (2013). Geometría hiperbólica en la obra de Escher. *VII CIBEM*, 266-277. Consultado en https://goo.gl/1Dkkyq.

Corrales, C. (2005). Escher I: las matemáticas para construir. *suma*, *49*, 101-108.

Delgado Vásquez, J. (2004). *Introducción a la geometría hiperbólica*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. Consultado en https://goo.gl/0S9ON0.

Lascurain, A. (2005). *Una introducción a la geometría hiperbólica bidimensional*. Ciudad de México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Lessa, P. (2012). *Geometría hiperbólica plana*. Consultado en https://goo.gl/cRKLtM.

Mendoza Ramírez, D. (2011). *Teselaciones en el Disco de Poincaré*. Xalapa, México: Universidad Veracruzana.

Montesinos Amilibia, J. (2001). *La cuestión de la consistencia de la geometría hiperbólica*. Consultado en https://goo.gl/Vh4SxH.

Pérez Muñoz, J. (2004). *Geometría Riemanniana*. Consultado en https://goo.gl/vPxuW7.

Rojo, M. R. (2008). *Escher y las matemáticas*. Consultado en https://goo.gl/HqCFvA.

Salcedo Martínez, E. (2012). *El grupo de Möbius y la métrica hiperbólica*. Consultado en https://goo.gl/i4rPBo.

Serrentino, R. (2008). Los teselados periódicos de M. C. Escher. *SIGRADI,* (98), 2-9. Consultado en https://goo.gl/2DWO2R.

Silva, A. R. y de Barros, H. (2011). *Geometría euclidiana plana*. Consultado en https://goo.gl/ZYrBnn.